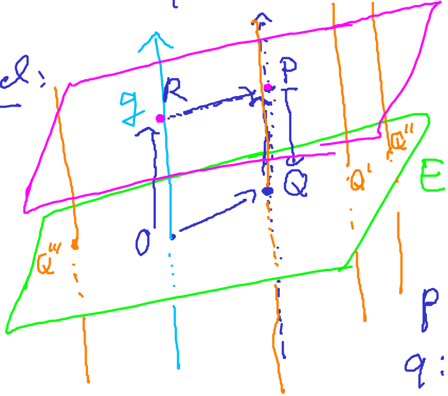
Repetition §5.1–2 Lineare Abbildungen, Kern, Bild.

Seien V, W Vektorräume über K.

$f: V \to W$ linear $\iff$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall v, v' \in V:\ f(v+v') = f(v) + f(v') \\ \forall v \in V\ \forall \lambda \in K:\ f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \end{array} \right\}.$

Geometrisches Beispiel:



V = 3-dim. Raum

Ebene

$\forall P \in V$ Schreibe $P = Q + R$ für eindeutige $Q \in E$ und $R \in g$.

$p: V \to E,\ P \mapsto Q$ linear.

$q: V \to g,\ P \mapsto R$ linear.

beide surjektiv.

$V \to V,\ P \mapsto P$ linear, ~~nicht~~ surjektiv.

$\mathrm{Kern}(p) = g$

$\mathrm{Kern}(q) = E$

Prop.: f injektiv $\iff \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$.

Für jedes $v \in V$ ist

$$\{v' \in V \mid f(v) = f(v')\} = \{v' \in V \mid f(v'-v) = 0\}$$

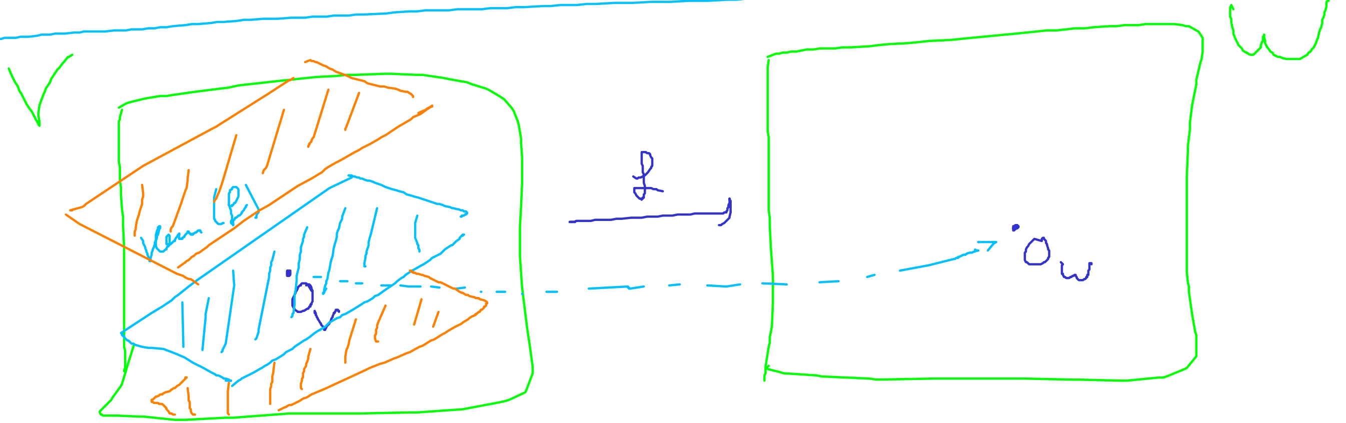
$$\Updownarrow$$

$$f(v'-v) = f(v') - f(v) = 0$$

| Schreibe $v' = v + v''$.

$$= \{v + v'' \mid \underbrace{v'' \in V \text{ mit } f(v'') = 0}_{\iff v'' \in \operatorname{Ker}(f)}\}$$

$$= v + \operatorname{Ker}(f).$$



Beispiel: $V = W = C^\infty(I) = \{$ beliebig oft differenzierbare Funktionen $I \to \mathbb{R}\}$

$K = \mathbb{R}$. $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

$\frac{d}{dx} : V \to V, \ f \mapsto \frac{df}{dx}$. linear.

konstante Funktion mit Wert 1.

$\mathrm{Kern}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left\{ f \in V \ \middle| \ \frac{df}{dx} = 0 \right\} = \mathbb{R} \cdot \underline{1}$

$\mathrm{Bild}\left(\frac{d}{dx}\right) = V$

Allgemein: Sei $D : V \to V, \ f \mapsto \sum_{i=0}^{d} g_i \cdot \frac{d^i f}{(dx)^i}$, für gegebene $g_i \in V$.

linearer Differentialoperator, mit $g_d = \underline{1}$.

$\mathrm{Kern}(D) = \{ f \in V \mid D(f) = 0 \}$ Lösungsraum der $\underbrace{\ }_{\text{homogenen}}$ linearen Differentialgleichung $D(f) = 0$

Satz: $\dim \mathrm{Kern}(D) = d$.

$\mathrm{Bild}(D) = \{ h \in V \mid$ Die DGL $D(f) = h$ hat eine Lösung in $V \} = V$.

Für jedes $h \in V$ wähle $f_0 \in V$ mit $D(f_0) = h$. "Partikulärlösung"

Dann ist $\{ f \in V \mid D(f) = h \} = f_0 + \mathrm{Kern}(D)$

allg. Lösung der homogenen DGL.